Partie II : Thermodynamique et mécanique des fluides
Chapitre 7

TD – Transferts d'énergie par conduction thermique

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire") | [● ○ ○] : difficulté des exercices

I Vrai-faux/qcm $\star$ | [● ○ ○]

1 - (V/F) La résistance thermique d'un élément de section S, longueur L, conductivité thermique λ :

- Augmente si S augmente ? - Augmente si L augmente ? Augmente si λ augmente ?

2 - Rappeler l'unité de la diffusivité thermique.

Si on double la taille d'un système, la propagation d'un front chaud dans tout le système prendra 2 fois plus de temps ? 4 fois plus ? $\sqrt{2}$ fois plus ?

3 - (V/F) En régime permanent, les profils de température sont nécessairement linéaires.

4 - Rappeler le nom et les unités des grandeurs habituellement notées $\vec{j}_{\text{th}}$, Φ_{th}, λ, κ, T, R_{th}, h.

Donner également les relations qui existent entre ces grandeurs, éventuellement sous certaines hypothèses.

II Déterminer un flux thermique $\star$ | [● ○ ○]

Il fait $T_0 = 0.0°\text{C}$ à l'extérieur et $T_1 = 20.0°\text{C}$ à l'intérieur d'une maison. On suppose le régime stationnaire atteint et les différents éléments modélisés en géométrie 1D cartésienne. En conséquence, tous les profils de température dans les matériaux solides sont linéaires.

1 - Calculer le flux thermique à travers un mur en béton de surface $2.5\,\text{m} \times 10.0\,\text{m}$ et d'épaisseur $e = 30.0\,\text{cm}$. On supposera que T_0 et T_1 sont les températures des faces internes et externes du mur.

2 - Comparer avec la puissance typique fournie par un radiateur. Que faire ?

On donne la conductivité thermique $\lambda_{\text{béton}} = 1.0\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

III Résistance thermique d'une habitation $\star$ | [● ○ ○]

On considère un matériau de masse volumique μ, capacité thermique massique à pression constante c_p, conductivité thermique λ. La situation est unidimensionnelle. La section S est constante, on note e la longueur. Le matériau est calorifugé sur les côtés, mais pas à ces extrémités, où il est mis en contact avec un thermostat à la température T_1 et un thermostat à la température T_2.

1 - Définir la résistance thermique de l'ensemble. Puis l'exprimer en fonction de λ, e et S. On justifiera pour cela que $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, et donc que j_{th} est constant avec une expression facile à déterminer.

On considère maintenant une habitation. La surface des murs est $S_{\text{mur}} = 40\,\text{m}^2$. Ceux-ci sont fait de briques (épaisseur $e_1 = 20\,\text{cm}$, $\lambda_1 = 0.7\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), et sont isolés par de la laine de verre (épaisseur $e_2 = 20\,\text{cm}$, $\lambda_2 = 0.04\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$). La température extérieure est $T_0 = 0.0°\text{C}$, et celle à l'intérieure est $T_1 = 20.0°\text{C}$.

2 - a - Exprimer et calculer la résistance thermique équivalente de l'ensemble des murs.

b - Exprimer puis calculer le flux thermique vers l'extérieur de la maison.

On prend maintenant en compte les fenêtres. Il y a 3 fenêtres double vitrage, chacune de résistance thermique $R_{th,f} = 0.15\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$.

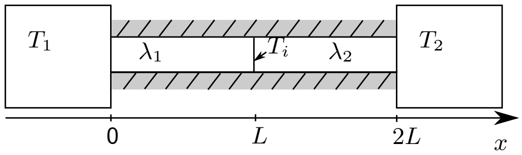
3 - a - Exprimer et calculer la résistance thermique équivalente de l'ensemble des fenêtres.

b - Exprimer et calculer la résistance thermique équivalente de l'ensemble fenêtres + murs (on garde la même surface qu'à la question précédente pour les murs).

c - Exprimer puis calculer le flux thermique vers l'extérieur de la maison.

IV Température de contact [● ● ○]

On considère une table en bois et une plaque en cuivre dans une pièce à 20°C. La table et le cuivre sont donc à $T_2 = 20$°C également. Pourtant, on a une sensation de froid plus intense lorsque l'on touche le morceau de cuivre par rapport au morceau de bois.
On veut expliquer pourquoi en modélisant simplement la situation.
On va donc considérer la situation schématisée ci-contre qui comprend un thermostat à la température $T_1 = 35$°C, d'un barreau de section S et longueur L (conductivité thermique $\lambda_1 = 0.6\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$), d'un barreau de même section et longueur (conductivité thermique $\lambda_2 = 0.2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour le bois, ou $400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour le cuivre), et enfin d'un thermostat à la température $T_2 = 20$°C.



On suppose que les barreaux sont calorifugés sur les côtés, et que le régime stationnaire est atteint. On rappelle l'expression $R_{th} = \dfrac{L}{\lambda S}$.
L'objectif est de déterminer l'expression de la température "de contact" T_i, qui est la température à l'interface entre barreau 1 et barreau 2.

1 - Faire le lien entre le modèle et la réalité en indiquant, sur le schéma ci-dessus, ce qui représente l'intérieur de la main, les couches superficielles de la main , les couches superficielles de la table ou de la plaque de cuivre, et le reste de la table ou de la plaque.

2 - Représenter un schéma équivalent au problème en terme de résistances thermiques, qui fait apparaître les trois températures et le flux thermique.

3 - Donner l'expression de T_i en fonction T_1, T_2, λ_1 et λ_2.

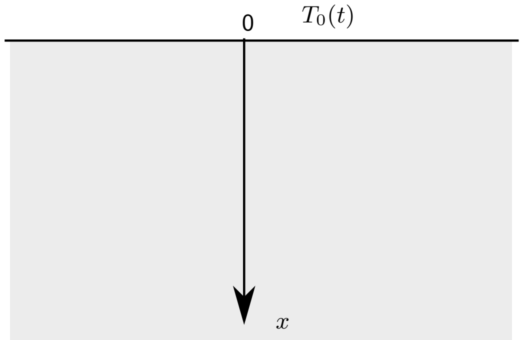
4 - Faire l'application numérique pour T_i dans le cas du bois et du cuivre.

Dans lequel des deux cas le flux thermique perdu par la main sera-t-il le plus grand ?

Conclure sur la sensation de chaud ou de froid.

V Régime non stationnaire – Onde thermique dans le sol [● ● ●]

La température au dessus du sol varie de façon journalière (nuit/jour), et également de façon annuelle (été/hiver). Ces variations se font autour d'une valeur moyenne T_m.
On veut étudier la façon dont ces variations de température se répercutent sur le sous-sol. La température dans le sol va varier autour de la même valeur moyenne T_m, mais on veut savoir avec quelle amplitude elle varie autour de cette valeur. Ceci peut-être intéressant pour étudier par exemple l'impact sur la végétation ou pour enterrer suffisamment profondément les canalisations d'eau afin qu'elles ne gèlent pas l'hiver.
On prendra une diffusivité thermique $\kappa = \dfrac{\lambda}{\mu c_p} \simeq 10^{-6}$ S.I. pour la terre.



1 - Rappeler l'équation de la diffusion thermique. Préciser l'unité du coefficient de diffusion κ.

On écrit $T(x,t) = T_m + \theta(x,t)$, où $\theta(x,t)$ est la variation autour de la moyenne T_m.
On suppose que la température à la surface varie de façon sinusoïdale : $T(0,t) = T_m + \theta_0 \cos(\omega t)$.
On est donc en régime sinusoïdal forcé. L'équation de la chaleur étant linéaire, on peut utiliser le formalisme complexe. On écrit donc $\underline{\theta}(x,t) = \theta_0 \exp\{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)\}$ avec $\underline{k} \in \mathbb{C}$. La condition aux limites est $\underline{\theta}(0,t) = \theta_0 \exp\{\mathrm{j}(\omega t)\}$.

2 - a - Donner les expressions de $\left(\dfrac{\partial \underline{\theta}}{\partial t}\right)_x$ et de $\left(\dfrac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2}\right)_t$.

b - En utilisant l'équation de la chaleur, montrer que le vecteur d'onde vérifie $\underline{k}^2 = -\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\kappa}$.

c - Montrer que ceci implique $\underline{k} = \pm\left(\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{\mathrm{j}}{\delta}\right)$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2\kappa}{\omega}}$. Pour prendre la racine carrée on pourra utiliser $-\mathrm{j} = e^{-\mathrm{j}\pi/2}$ et donc le fait qu'une racine de $-\mathrm{j}$ est $e^{-\mathrm{j}\pi/4}$.

3 - a - Utiliser cette expression de $\underline{k}$ afin d'exprimer $\underline{\theta}(x,t)$. Un des deux choix possibles pour le signe de $\underline{k}$ n'a pas de sens physique et on l'exclura.

b - Donner enfin l'expression de $\theta(x, t)$.

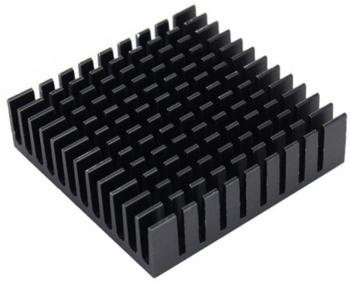
4 - On considère deux cas : la variation jour/nuit, et la variation annuelle.

Donner la valeur numérique de δ dans chacun des cas.

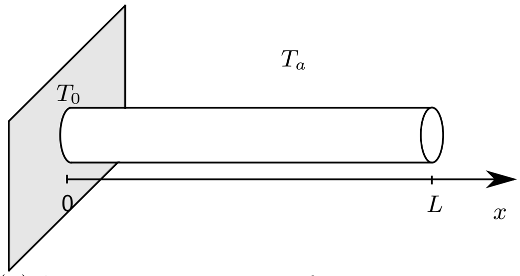
Donner la profondeur à laquelle l'amplitude des variations en surface est divisée par 10 dans chacun des cas.

VI Ailette de refroidissement ⋆ | [• • ∘]

Pour améliorer le refroidissement d'un milieu solide (par exemple un composant électronique qui chauffe ou le carter d'un moteur) on ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variée. L'objectif est de maximiser la surface de contact entre ailette et air, afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.



On étudie ici une ailette cylindrique (rayon a, longueur L, conductivité thermique λ), placée sur un matériau de température T_0. L'air autour est à la température T_a. Il y a des échanges conducto-convectif entre la surface latérale de l'ailette et l'air, caractérisés par une puissance surfacique $h(T(x) - T_a)$ où $T(x)$ est la température de l'ailette à l'abscisse x considérée.



On prendra $a = 1\,\text{mm}$, $L = 20\,\text{cm}$, $\lambda = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (cuivre), et $h = 15\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

On effectue les hypothèses suivantes : (i) le régime est stationnaire, (ii) la température est uniforme sur une section donnée du cylindre, (iii) le contact thermique entre la barre et le matériau à refroidir est parfait, (iv) la longueur de l'ailette est supposée infinie.

1 - Montrer que la température suit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{\delta^2}T(x) = -\dfrac{1}{\delta^2}T_a$, avec $\delta = \sqrt{a\lambda/(2h)}$. On s'aidera de la méthode 2.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

On rappelle que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $A\exp(r_1x) + B\exp(r_2x)$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique associé.

3 - Proposer une définition de l'efficacité e de l'ailette et l'évaluer.

VII Tuyau d'eau chaude – coordonnées cylindriques [• • ∘]

On considère un tuyau de longueur L, de diamètre intérieur R_1 et extérieur R_2. Il transporte un fluide chaud à la température uniforme T_1. La paroi extérieure est à la température T_2. Le tuyau est fait d'un isolant de conductivité thermique $\lambda = 0.04\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
On suppose le problème unidimensionnel et ne dépendant que de la coordonnée radiale r.

1 - Établir l'équation différentielle suivie par la température $T(r)$ dans la paroi du tuyau. On se référera à la méthode 2. En particulier :

- Les coordonnées sont les coordonnées cylindriques.
- La tranche sera un anneau compris entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ (obligatoirement faire un schéma). On justifiera que son volume est $\mathrm{d}V = l \times 2\pi r\mathrm{d}r$.
  On fera attention au fait que la surface S du cylindre dépend du rayon r : on a $S(r)$ et $S(r + \mathrm{d}r)$. Ceci intervient dans l'expression des flux thermiques $\Phi_{\text{th}}(r)$ et $\Phi_{\text{th}}(r + \mathrm{d}r)$.

2 - Donner la solution de cette équation. Parmi les deux constantes d'intégration, on donnera uniquement l'expression de celle qui est en facteur de $\ln(r)$.

3 - En déduire l'expression du flux thermique Φ_{th} qui va vers l'extérieur du tuyau.

Faire l'application numérique pour $T_1 = 80°\text{C}$, $T_2 = 20°\text{C}$, $R_1 = 1.6\,\text{cm}$, $R_2 = 2.6\,\text{cm}$ (typique pour des tuyaux de chauffage), et une longueur $L = 100\,\text{m}$.

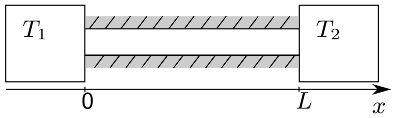
Le débit volumique est $D_v = 100\,\text{L/h}$, et on donne également la capacité thermique massique de l'eau $c = 4.18\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

4 - Donner l'expression puis la valeur numérique de la chute de température entre l'entrée du tuyau et la sortie 25 m plus loin.

5 - Sur quels paramètres peut-on jouer pour minimiser cette chute de température ?

VIII Caractère irréversible de la diffusion thermique [● ● ○]

On considère un barreau cylindrique de longueur L et section S, calorifugé sur le pourtour et en contact à ses extrémités avec des thermostats aux températures T_1 et T_2.



On suppose le régime stationnaire atteint. On note $R_{th} = \dfrac{L}{\lambda S}$ la résistance thermique du barreau.
On suppose que $T_1 > T_2$. On note Φ le flux thermique du thermostat 1 vers le thermostat 2.

1 - Rappeler une propriété importante du flux thermique $\Phi(x)$ à travers une section droite du barreau d'abscisse x lorsque l'on est en régime permanent.

2 - Appliquer le second principe de la thermodynamique au système {barreau} entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

3 - Que peut-on dire de $\mathrm{d}S$ en régime permanent ?

Donner ensuite l'expression de l'entropie échangée δS_e en fonction de T_1, T_2, Φ, et $\mathrm{d}t$, puis en fonction de T_1, T_2, λ, S, L et $\mathrm{d}t$.

4 - Donner l'expression de l'entropie créée entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de T_1, T_2, λ, S, L et $\mathrm{d}t$.

Est-ce que l'entropie créée peut-être nulle ? Conclure sur le caractère irréversible de la conduction thermique.

5 - Enfin, qu'implique le fait que $\delta S_c > 0$ sur le signe de λ ?

IX Transport d'iceberg [● ● ●]

Résolution de problème

Le projet "icedream" est l'idée de l'ingénieur français Georges Mougin (on peut chercher sur Internet) qui développe son concept depuis 40 ans : remorquer des icebergs et les exploiter pour produire de l'eau douce.
Les fondamentaux du projet pilote sont les suivants : un iceberg de 10 millions de tonnes, un remorqueur qui relie en 140 jours Terre-Neuve et les Îles Canaries.
On donne : la puissance thermique P_{th} échangée par un système à la température T en contact sur une surface S avec un fluide à la température T_{fluide} dans le modèle conducto-convectif de Newton :

$$P_{th} = h(T_{\text{fluide}} - T)S,$$

avec le coefficient de transfert thermique pour l'air $h = 5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$, et celui pour l'eau $h = 10^2\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.
Enthalpie de fusion de la glace : $h_{\text{fus}} = 333\,\mathrm{kJ/kg}$.

Question : Estimer la proportion de l'iceberg qui fond chaque jour.
En déduire si le projet est raisonnable.
On effectuera toutes les hypothèses simplificatrices nécessaires.

Remarque : Le problème énoncé est volontairement imprécis, il s'agit d'une question qui n'est pas formulée directement dans le langage physique. Il faut donc modéliser le problème, faire des hypothèses, aller chercher les valeurs numériques des grandeurs pertinentes dans le cours ou sur Internet (ou demander à l'examinateur si c'est un oral).
La démarche de résolution générale d'un tel problème reprend celle déjà exposée sur les grilles d'évaluation de colle :

- On "pose le problème" : schéma du problème, on identifie les grandeurs pertinentes et on leur donne un symbole, on estime leurs valeurs numériques. En thermodynamique, on peut commencer par identifier la transformation et ce que l'on connaît/cherche dans les états initial et final.
- On cherche une stratégie pour résoudre le problème : écrire les relations connues entre les grandeurs, faire des hypothèses.
- On met en œuvre la stratégie : on se lance dans les calculs, on fait les applications numériques.
- On a un regard critique sur les résultats obtenus : formules homogènes, valeurs numériques réalistes. On commente le résultat.

Indices :

- On peut considérer un seul des deux transfert d'énergie thermique.
- On peut estimer l'ordre de grandeur de la surface de contact de l'iceberg avec l'eau en simplifiant au maximum la géométrie.
- La proportion de l'iceberg qui fond correspond à la masse Δm fondue, divisée par la masse totale m.